数理解析研究所講究録
417巻 1981年 54-61

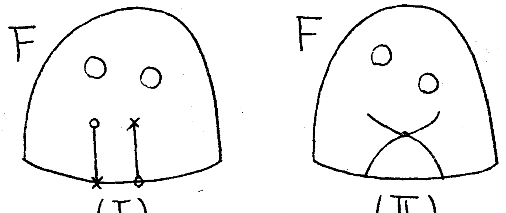
Standard representation curves of $\pi_1(M^3)$.

北大　教養　　小林一章

向きづけ可能な3次元多様体M^3の基本群の元$w\in\pi_1(M^3)$を"standard"な単純閉曲線で表現する事を考える(実際は$w\in[\pi_1(M^3),\pi_1(M^3)]$(交換子群)なる元にのみ standard representation curve が定義される).

αをM^3内でホモローグ0な単純閉曲線とし，$\phi: F\to M^3$を$\phi|\partial F$が embedding で$\phi(\partial F)=\alpha$となる写像とする(ただしFは compact orientable surface で$\partial F\cong S^1$となるものとする).

piping technique を使ってϕの singularities $S(\phi)$は次の2つの types に還元出来る。



(I)　(II)

(I) cusp singularity

(II) tree with a branch point.

(II)の1つの成分をTとするとTはさらに次の性質をもつ。

「$\mathring{B}^2\supset T-(T\cap\partial F)$, $B^2\cap\{S(\phi)-T\}=\phi$, $B^2\cap\partial F\cong B^1$となる2-ball B^2がF内にある」　$\phi(B^2)\searrow 0$ in M^3 だから

$U(\phi(B^2), M^3)$ は3-ballで，そこで$U(\phi(B^2), M^3)$ の中でのみϕを変形することにより上の(III)の singularities は全て(I)の singularities に還元出来る。

定義0. αをM^3内でホモローグ0な単純閉曲線とし$\phi: F \to M^3$ を上のような写像で(I)の singularities のみをもつとする。そのような写像の集合$\{(F, \phi)_\alpha\}$ に次のような順序をいれる。$(F_1, \phi_1)_\alpha$, $(F_2, \phi_2)_\alpha \in \{(F, \phi)_\alpha\}$ に対し

(1) $g(F_1) < g(F_2)$ （$g(F)$ はFの種数）または

(2) $g(F_1) = g(F_2)$ で $\#\{S(\phi_1)\} < \#\{S(\phi_2)\}$

このとき $(F_1, \phi_1)_\alpha < (F_2, \phi_2)_\alpha$ と定義する。また$g(F) = p$, $\#\{S(\phi)\} = 2q$ のとき singular surface $(F, \phi)_\alpha$ の type（または order）は(p, q)であるという。Fはコンパクト，ϕはPL写像だから$\{(F, \phi)_\alpha\}$ は最小元をもち，その最小元をαの minimal surface という。

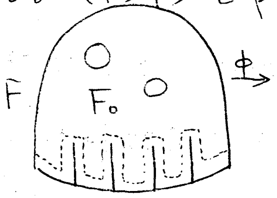
定義1. αをM^3内のホモローグ0な単純閉曲線とする。αの minimal surface の typeが$(p, 0)$ $(p \geq 0)$のときαはM^3内の standard curve という。

命題1. αをM^3内のホモトピック0な単純閉曲線とする。このときαが standard curve $\Longleftrightarrow$ αはM^3内で non-singular 2-ball を bound する。

命題2. 交換子群$[\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ の任意の元ωに対して$\omega =$

$[\alpha]$ となる standard curve α が存在する。(ここで$[\ ]$はホモトピー類を表わす).

証明. ホモトピー類が ω となる1つの単純閉曲線を β とする。(F, Φ) を β の minimal surface とし，その type を (p, q) とする。



$q = 0$ なら β は standard curve.

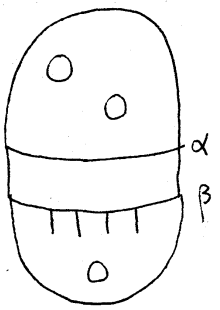
$q > 0$ のとき図の点線の Φ による image を α とおく。α は type $(p, 0)$ の singular surface を bound し，しかもこれが α の1つの minimal surface になっている。また α と β はホモトピック. 従って α は $[\alpha] = \omega$ となる standard curve.

命題3. α を M^3 内の standard curve とする。B^3 を $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ となるような M^3 内の任意の 3-ball とすると常に $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ が成り立つ。

証明. (F, Φ) を α の minimal surface としその type を $(p, 0)$ とする。$B^3 \cap \alpha \cong B^1$ だから $F_\alpha \cap \partial B^3 = l \cup c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_p$ (disjoint union) とかける. ここで $F_\alpha = \Phi(F)$, l は simple arc, c_i は simple closed curve. 次に c_i が ∂B^3 上で innermost であるとする。即ち $\partial B_i^2 = c_i$ となる 2-ball B_i^2 が ∂B^3 上に存在したとする。もし $c_i \simeq 0$ in F_α なら c_i が F_α 上で bound する $\tilde{B}_i^2$ を B_i^2 に置き代える事により c_i を除去出来る。また $c_i \not\simeq 0$ なら同様の操作で F_α の genus を小さく出来る。これは F_α が α の minimal surface である事に矛盾. 以上より $F_\alpha \cap \partial B^3 = \ell$ としてよい。そこでもし $F_\alpha \cap B^3$ が 2-ball に位相同型なら $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$, また $F_\alpha \cap B^3$ が種数1以上の連結な向きづけ可能な曲面 F_* なら $F_* \subset B^3$ だから F_* を singular 2-ball に変え piping technique を使ってその singularities を全て (I) に変えられる。従って α の minimal surface の type を小さく出来, これは仮定に反する。従ってこの場合は起らない。故に $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$.

命題4. α, β を $\omega \in \pi_1(M^3)$ の representation curves とする。F_α, F_β を α, β の minimal surface とする。もし α が standard curve なら F_α の order は F_β の order 以下である。

証明. もし F_β の order の方が F_α の order より小さいならば α に F_α の order より小さい singular surface が張れ, これは矛盾.



系. α, β が standard curves で $\alpha \simeq \beta$ (free homotopic) $\Rightarrow \alpha$, β の minimal surfaces の types は同じ.

定義2. $\omega \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ を取り α を ω の representation curve で standard なものとする。F_α を α の minimal surface とする。この時 F_α の type (order) で ω の type (order) を定義す

る。（この定義は命題3,5から well-defined）.

命題5. M^3, N^3 を compact, orientable 3-manifolds とし $f: M^3 \longrightarrow N^3$ をホモトピー同値写像とする。任意の $\omega \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ に対し $\mathrm{ord}(\omega) = \mathrm{ord}\, f_*(\omega)$.

証明. α を ω の standard representation curve とし, F_α を α の minimal surface, $\mathrm{ord}(F_\alpha) = (p, 0)$ とすると f の連続性から $\mathrm{ord}(f(F_\alpha)) = (p', g')$ に対し $p' \leqq p$, $g' \geqq 0$. すると命題1の証明方法と同様にして $f_*(\omega)$ の表現曲線として,その minimal surface が $(p', 0)$ となるものがある。故に $\mathrm{ord}(\omega) \geqq \mathrm{ord}(f_*(\omega))$ 次に f の homotopy inverse を使う事により $\mathrm{ord}(\omega) = \mathrm{ord}(g_*(f_*(\omega))) \leqq \mathrm{ord}(f_*(\omega))$ 故に $\mathrm{ord}(\omega) = \mathrm{ord}(f_*(\omega))$.

命題6. α を $\omega \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ の standard representation curve とし, F_α を α の minimal surface とする。β を F_α 上の単純閉曲線で F_α 上でホモトピック0でないとする。すると β は M^3 内でも1点にホモトピックでない。（従って $i_*: \pi_1(F_\alpha) \longrightarrow \pi_1(M^3)$ に対し $i_*([\beta]) \neq 1$）

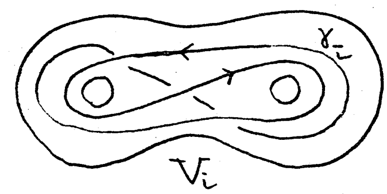
証明 もし $\beta \simeq 0$ in M^3 なら β を bound する singular 2-ball を使って F_α を変形し, α の minimal surface の order を小さく出来る。これは F_α が minimal という事に矛盾.

注. 一般に $\mathrm{Ker}\, i_* \neq \{1\}$ である。もし常に $\mathrm{Ker}\, i_* = \{1\}$ が成立するなら Seifert fiber space でホモロジー球面となっている

ようなM^3に対し，その normal fiber が表わすホモトピー類を g とすると $g=1\in\pi_1(M^3)$ となってしまう。これは一般に成立しない。

命題7. α を $\omega\in[\pi_1(M^3),\pi_1(M^3)]$ の standard representation curve とし，F_α を α の minimal surface で種数が p となるものとする。すると $\omega=\prod_{i=1}^{p}[a_i,b_i]$，$a_i, b_i\in\pi_1(M^3)$ とかけ，しかも p はそのような最小数である。($p>0$ の時は $a_i\neq1, b_i\neq1$ in $\pi_1(M^3)$).
また逆に $\omega=\prod_{i=1}^{p}[a_i,b_i]$ とかけ p がそのような最小数なら ω は minimal surface の種数が p であるような standard representation curve をもつ.

証明. α は F_α の境界だから a_i, b_i $(i=1,2,\dots,p)$ を $\pi_1(F_\alpha)$ の自然な基とすると $\omega=[\alpha]=\prod_{i=1}^{p}[a_i,b_i]$ とかけ，しかも命題6より $a_i\neq1, b_i\neq1$ in $\pi_1(M^3)$. またもし $\omega=\prod_{i=1}^{g}[c_i,d_i]$ とかけ $g<p$ ならこの証明の後半より ω の standard representation curve α' でその minimal surface $F_{\alpha'}$ の種数が g となるものが存在する。これは命題4の系に矛盾する。従って p は最小数. 次に $\omega=\prod_{i=1}^{p}[a_i,b_i]$ と表現され，p がそのような最小数とする。α_i, β_i を $x_0\in M^3$ を基点とする単純閉曲線で a_i, b_i を表現しているものとする。$V_i=U(\alpha_i\underset{x_0}{\cup}\beta_i, M^3)$ とおくと V_i は種数2の handlebody である。そこで図のような単純閉曲線γ_iをV_i内に取る。すると $[\gamma_i]=a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}$ で γ_i は種数1の曲面 F_{γ_i} を bound する。連



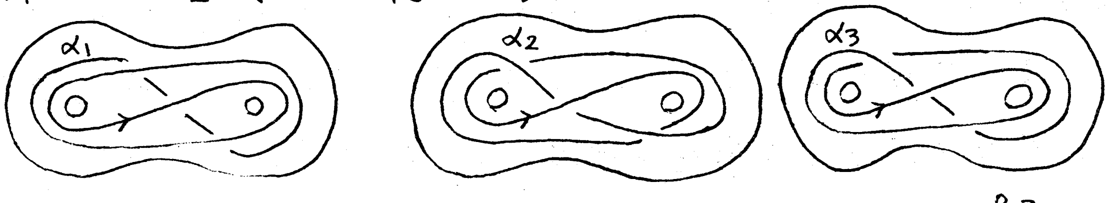
結和 $\alpha = \#_{i=1}^{p} \gamma_i$ を取ると α は特異点のない曲面 $F_\alpha = \natural_{i=1}^{p} F_{\gamma_i}$ を bound する。F_α の種数は p. 今 ω の standard representation curve α_0 の minimal surface の種数を p_0 とすると命題4の系より $p_0 \leqq p$. そしてもし $p_0 < p$ なら前半から $\omega = [\alpha_0] = \prod_{i=1}^{p_0} [a_i', b_i']$ とかける。これは p がそのような数のうち最小のものという条件に矛盾. 故に $p_0 = p$. そして F_α は α の minimal surface である。

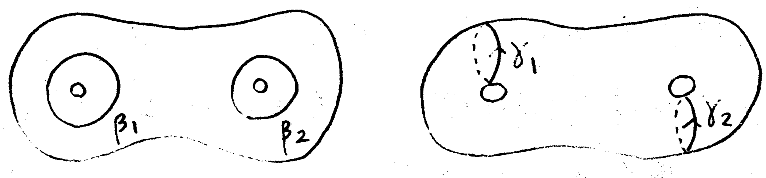
定義3. $C_0 = \{1\}$, $C_1 = \pi_1(M^3)$ の交換子の集合, $C_2 = C_1 \times C_1$, ..., $C_n = \underbrace{C_1 \times \cdots \times C_1}_{n}$ とし $W_i = [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)] - C_{i-1}$ とする.

系1. $W_p \neq \phi$ なら $ord(\omega) = p$ となる $\omega \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ がある。

系2 H_p^3 を種数が2以上の handlebody とすると任意の p に対し $ord(\omega) = p$ となる ω が存在する。

例 $M^3 = H_2^3 \cong (S^1 \times B^2) \natural (S^1 \times B^2)$ とおく.





$\alpha_i, \beta_j \subset \mathring{M}^3$
$\gamma_j \subset \partial M^3$
$(i=1,2,3;\ j=1,2)$

とすると $[\alpha_i] = a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ で α_i の minimal surface の type は $(1,0)$ 従って α_i は standard representation curves.

$M' = M^3 \underset{\beta_1 = \partial D^2 \times \{0\}}{\cup} (D^2 \times D^1)$, $M'' = M^3 \underset{\beta_2 = \partial D^2 \times \{0\}}{\cup} (D^2 \times D^1)$ とおく.

α_i と α_j は M^3 で ambient isotopic でない $(i, j = 1, 2, 3\ ;\ i \neq j)$. 何故ならもし $\alpha_i \approx \alpha_j$ in M^3 なら $\alpha_i \approx \alpha_j$ in both M' and M''. しかし α_1 は M' と M'' の中で 2-ball を bound し, α_2 は M', M'' 両方の中で 2-ball を bound しない。また α_3 は M'' の中で 2-ball を bound し M' の中で 2-ball を bound しない。

次に $\bar{h}_i : \partial M^3 \to \partial M^3$ を γ_i のまわりでの Dehn twist とする。$h : M^3 \to M^3$ を γ_i が bound する meridinal 2-ball へ twist を拡大して得られる $\bar{h}$ の extension homeomorphism とすると $h_2 h_1(\alpha_1) = \alpha_2$, $h_1(\alpha_1) = \alpha_3$. 従って補空間 $M^3 - \mathring{U}(\alpha_i, M^3)$ は全て位相同型である。

参考文献

N. Smythe : Handlebodies in 3-manifolds, Proc. A.M.S. 26. (1970) 534 − 538.